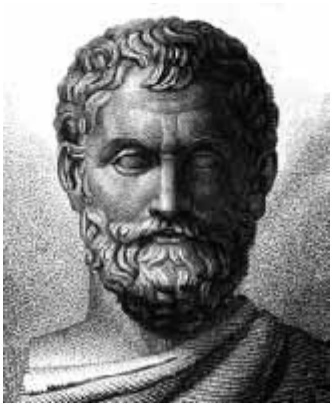
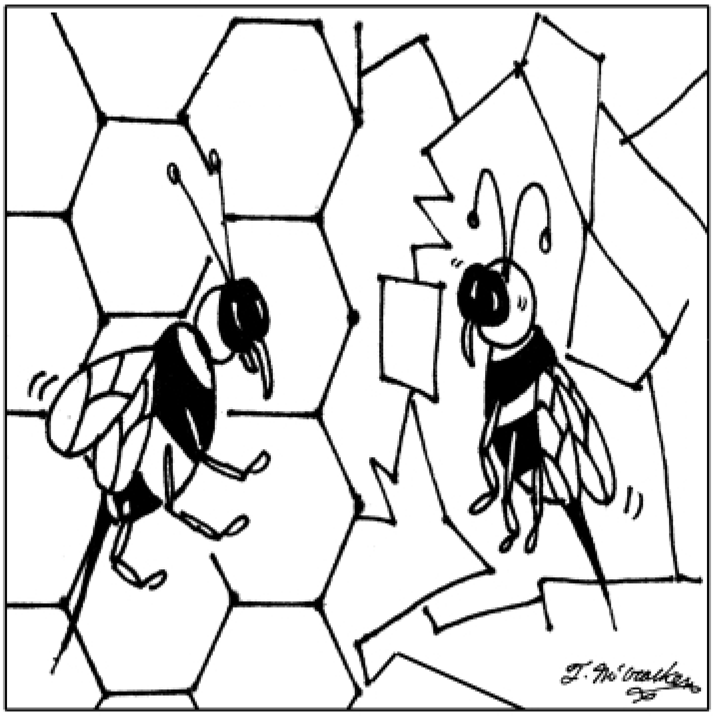
STELLINGEN & BEWIJZEN
5VWO – wiskunde B

1e versie

Euclides van Alexandrië
(ca. 265 - 200 v.Chr.)



Thales van Milete
(ca. 624 v.Chr. - 547 v.Chr.)



"That's what you get for
skipping geometry class."

INHOUDSOPGAVE

Algemene Begrippen

Stelling en bewijs
Een eigenschap of een bewering die je kunt bewijzen heet een stelling. Bij een stelling hoort een bewijs, dit is dus een ‘waterdichte redenering’, waar dus geen speld tussen te krijgen is.

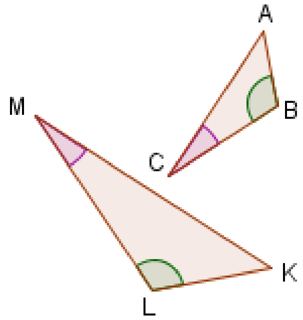
Definitie
Samenvattende omschrijving van de kenmerken van een begrip, zodat het niet met een ander kan worden verward.

QED
Het is in de wiskunde van oudsher gebruikelijk een bewijs af te sluiten met de afkorting ‘QED’. De letters QED staan voor de Latijnse uitdrukking ‘quod erat demonstrandum’, dat betekent ‘wat te bewijzen was’.

Bekend veronderstelde begrippen

- Rechte hoek
- Gestrekte hoek
- F-hoeken
- Z-hoeken
- Overstaande hoeken
- Middellijn
- Middelloodlijn
- Bissectrice/ deellijn
- Hoogtelijn
- Zwaartelijn
- Gelijkbenige driehoek
- Gelijkzijdige driehoek
- Rechthoekige driehoek
- Vierkant
- Rechthoek
- Parallellogram
- Ruit
- Cirkel

Gelijkvormige driehoeken
Twee driehoeken kunnen gelijkvormig met elkaar zijn. Dit is handig, aangezien je dan bepaalde gegevens (hoeken en afstanden) met elkaar kunt vergelijken.

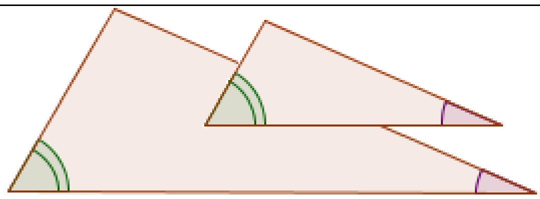
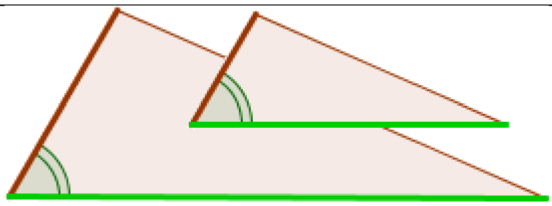
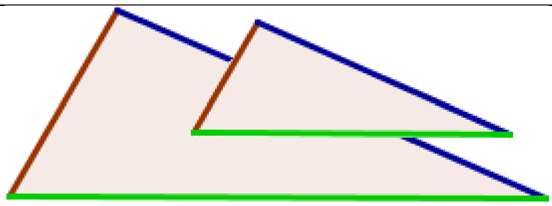
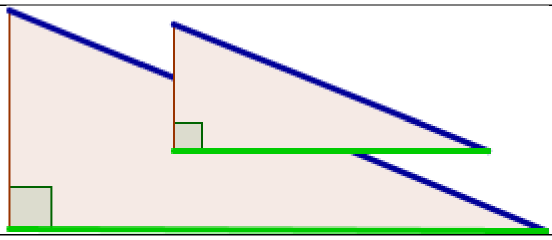


Als driehoek ABC gelijkvormig is met driehoek KLM noteren we dat als volgt:
$\Delta ABC \backsim \Delta KLM$.

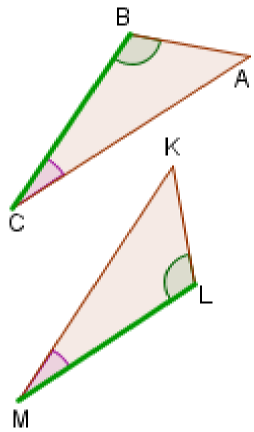
Er zijn vier zogeheten gelijkvormigheidskenmerken: hh, zhz, zzz, zzr, waarbij:
- h staat voor hoek
- z staat voor zijde
- r staat voor rechte hoek

Let er op dat deze letters met <u>kleine letters</u> worden geschreven!

Als je gebruik maakt van gelijkvormige driehoeken, dan zet je het gelijkvormigheidskenmerk achter de bewering met kleine letters: $\Delta ABC \backsim \Delta KLM$ (hh).

hh	Twee paren hoeken	
zhz	Een paar hoeken en de verhouding van de omliggende zijden	
zzz	De verhouding van zijden	
zzr	Een paar rechte hoeken en de verhouding van twee niet-omliggende zijden	

Congruente driehoeken
Soms kunnen twee driehoeken niet alleen gelijkvormig met elkaar zijn, maar zijn ook de zijden van beide driehoeken even lang. Dan spreken we van congruente driehoeken.

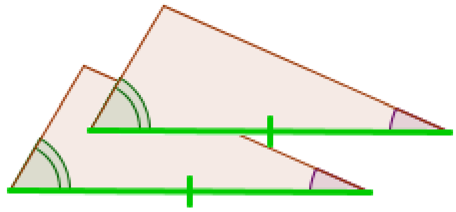
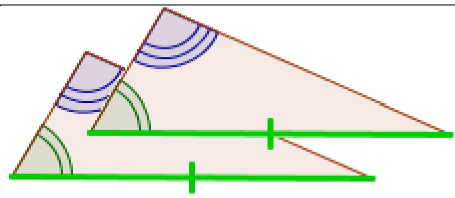
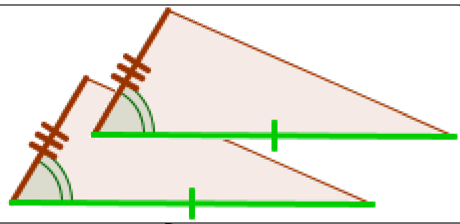
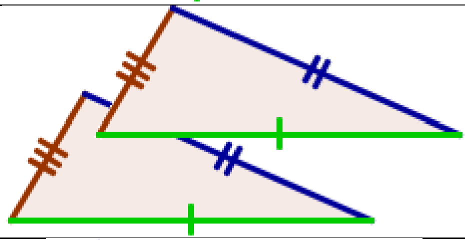
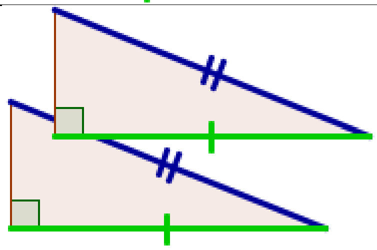


Als driehoek ABC congruent is met driehoek KLM noteren we dat als volgt:
$\Delta ABC \cong \Delta KLM$.

Er zijn vijf zogeheten congruentiekenmerken: HZH, ZHH, ZHZ, ZZZ, ZZR waarbij:
- H staat voor hoek
- Z voor zijde
- R voor rechte hoek

Let er op dat deze letters <u>met hoofdletters</u> worden geschreven!

Als je gebruik maakt van congruente driehoeken, dan zet je het congruentiekenmerk achter de bewering met hoofdletters: $\Delta ABC \cong \Delta KLM$ (HZH).

HZH	Een zijde en twee aanliggende hoeken	
ZHH	Een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek	
ZHZ	Twee zijden en de ingesloten hoek	
ZZZ	Alle zijden	
ZZR	Twee zijden en een rechte hoek tegenover een van die zijden	

Werkschema: het bewijzen van een stelling

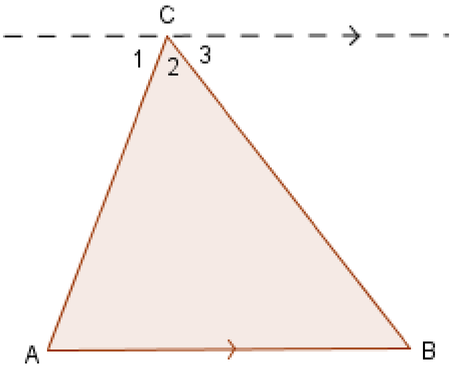
1. Formuleer wat gegeven is voor een concrete situatie
2. Noteer wat bewezen moet worden voor de gekozen situatie
3. Geef het bewijs. Vermeld hierbij de definities en stellingen die je gebruikt.

Stelling
In een driehoek is de som van de hoeken 180°.

Gegeven
Driehoek ABC

Te bewijzen
$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Bewijs
Trek een lijn door C evenwijdig aan AB.
(i) $\angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_3 = 180°$ (gestrekte hoek)
(ii) $\angle C_1 = \angle A$ (Z-hoeken)
(iii) $\angle C_3 = \angle B$ (Z-hoeken)
(i), (ii), (iii) $\Longrightarrow \angle A + \angle C_2 + \angle B = 180°$
Dus $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$



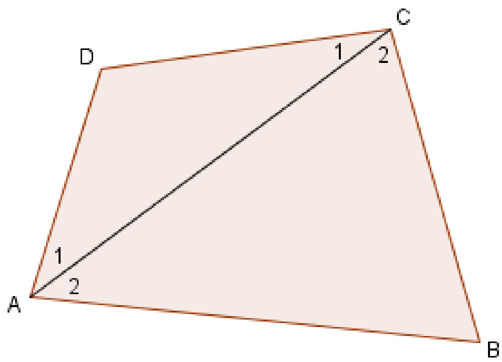
Stelling
In een vierhoek is de som van de hoeken 360°.

Gegeven
Vierhoek ABCD

Te bewijzen
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

Bewijs
Teken een willekeurige vierhoek ABCD en teken daarin de diagonaal AC.
In ΔACD is $\angle A_1 + \angle C_1 + \angle D = 180°$
In ΔABC is $\angle A_2 + \angle C_2 + \angle B = 180°$ +

$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle C_1 + \angle C_2 + \angle D + \angle B = 360°$
Dus $\angle A + \angle C + \angle D + \angle B = 360°$

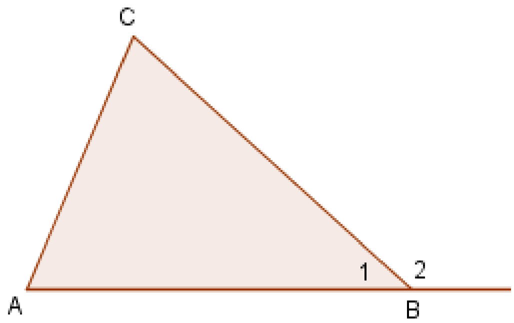


Stelling van de buitenhoek
In een driehoek is de buitenhoek gelijk aan de som van de niet-aanliggende binnenhoeken.

Gegeven
Driehoek ABC

Te bewijzen
$\angle A + \angle C = \angle B_2$

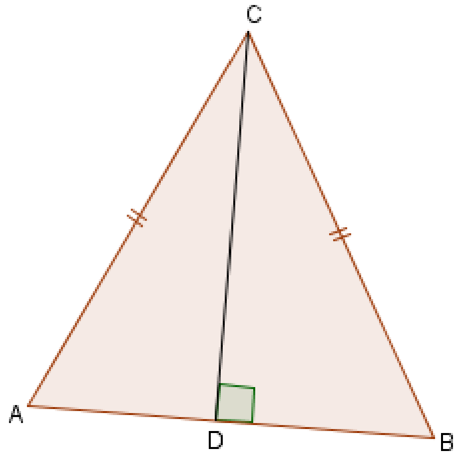
Bewijs:
(i) $\angle A + \angle B_1 + \angle C = 180°$ (hoekensom driehoek)
(ii) $\angle B_1 + \angle B_2 = 180°$ (gestrekte hoek)
(i), (ii) $\Longrightarrow \angle A + \angle B_1 + \angle C = \angle B_1 + \angle B_2$
Dus $\angle A + \angle C = \angle B_2$



Lemma (hulpstelling 1)
Elk punt met gelijke afstanden tot de punten A en B ligt op de middelloodlijn van lijnstuk AB.

Gegeven
Lijnstuk AB en punt C met AC = BC

Te bewijzen
C ligt op de middelloodlijn van AB



Bewijs
Teken CD loodrecht op AB

- (i) AC = BC
- (ii) CD = CD
- (iii) $\angle ADC = \angle BDC = 90°$

(i),(ii),(iii) $\Longrightarrow$ $\Delta ADC \cong \Delta BDC$ (ZZR)
Dus AD = BD

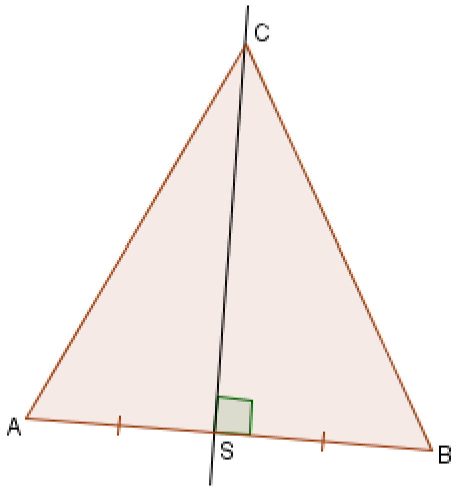
- (iv) D is het midden van AB
- (v) CD staat loodrecht op AB

(iv),(v) $\Longrightarrow$ C ligt op de middelloodlijn van AB

Lemma (hulpstelling 2)
Elk punt op de middelloodlijn van lijnstuk AB heeft gelijke afstanden tot AB.

Gegeven
Lijnstuk AB en punt C op de middelloodlijn van AB

Te bewijzen
AC = BC



Bewijs
Noem het snijpunt van de middelloodlijn met AB punt S.
Teken AC en BC.

- (i) AS = BS (middelloodlijn)
- (ii) CS = CS
- (iii) $\angle ASC = \angle BSC = 90°$

(i),(ii),(iii) $\Longrightarrow$ $\Delta ASC \cong \Delta BSC$ (ZHZ)
Dus AC = BC

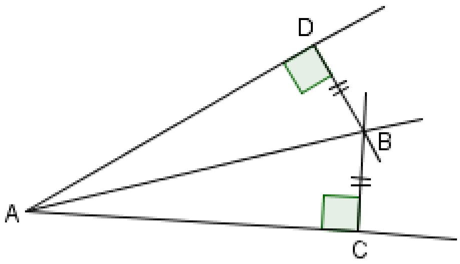
Lemma (hulpstelling 3)
Elk punt met gelijke afstanden tot de benen van een hoek ligt op de bissectrice van die hoek.

Gegeven
B heeft gelijke afstanden tot de benen van $\angle A$

Te bewijzen
B ligt op de bissectrice van $\angle A$

Bewijs
Teken AB en de loodlijnstukken BC en BD.
- (i) AB = AB
- (ii) BC = BD
- (iii) $\angle C = \angle D = 90°$

(i),(ii),(iii) $\Longrightarrow$ $\Delta BAC \cong \Delta BAD$ (ZZR)
Hieruit volgt $\angle BAC = \angle BAD$, dus B ligt op de bissectrice van $\angle A$



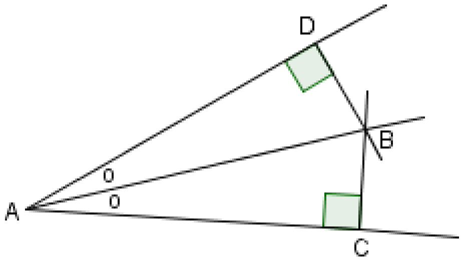
Lemma (hulpstelling 4)
Elk punt van de bissectrice van een hoek heeft gelijke afstanden tot de benen van die hoek.

Gegeven
B op de bissectrice van $\angle A$

Te bewijzen
B heeft gelijke afstanden tot de benen van $\angle A$

Bewijs
Teken de loodlijnstukken BC en BD.
- (i) AB = AB
- (ii) $\angle BAC = \angle BAD$
- (iii) $\angle C = \angle D = 90°$

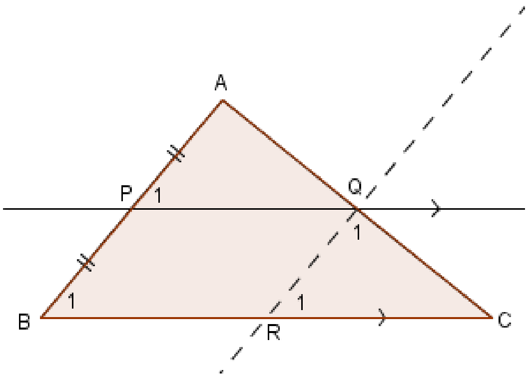
(i),(ii),(iii) $\Longrightarrow$ $\Delta BAC \cong \Delta BAD$ (ZHH)
Hieruit volgt BC = BD, dus B heeft gelijke afstanden tot de benen van $\angle A$.



Stelling van de middenparallel (1)
De lijn door het midden van een zijde van een driehoek en evenwijdig met een tweede zijde gaat door het midden van de derde zijde.

Gegeven
Driehoek ABC, P is het midden van AB, Q ligt op AC, PQ // BC

Te bewijzen:
AQ = QC



Bewijs
Trek door Q een lijn QR evenwijdig met AB (met R op BC).
Nu is: PQRB een parallellogram (paren evenwijdige zijden);
dus PQ = BR.
Verder

- (i) AP = BP = QR (parallellogram en gegeven)
- (ii) $\angle P_1 = \angle B_1 = \angle R_1$ (F-hoeken)
- (iii) $\angle A = \angle Q_1$ (F-hoeken)

(i), (ii), (iii) $\Longrightarrow$ $\Delta APQ \cong \Delta QRC$ (HZH); dus AQ = QC

Stelling van de middenparallel (2)
De middenparallel heeft als lengte de helft van de derde zijde.

Gegeven
Zie boven

Te bewijzen
$PQ = \frac{1}{2} BC$

Bewijs

- (i) Aangezien PQRB een parallellogram is geldt: PQ = BR
- (ii) Uit $\Delta APQ \cong \Delta QRC$ (HZH) volgt: PQ = RC

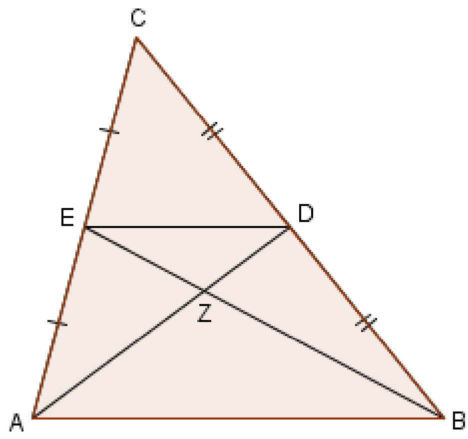
(i),(ii) $\Longrightarrow$ BR = RC, dus ook BC = 2 RC = 2 PQ
Dus $PQ = \frac{1}{2} BC$

Zwaartelijnstelling
Twee zwaartelijnen van een driehoek verdelen elkaar in stukken die zich verhouden als 1 ∶ 2.

Gegeven
Driehoek ABC met zwaartelijnen AD en BE en hun snijpunt Z

Te bewijzen
$AZ : ZD = 2 : 1$

Bewijs
Teken ED. Uit de stelling van de middenparallel volgt dat ED // AB. Hieruit volgt dat $\angle ABZ = \angle DEZ$ (Z-hoeken).
Omdat verder de overstaande hoeken bij Z gelijk zijn volgt dat $\Delta DEZ \backsim \Delta ABZ$ (hh).
Omdat DE de helft is van AB moet je alle afmetingen van ΔABZ met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen om de afmetingen van ΔDEZ te krijgen.
Dus geldt $AZ = 2 \cdot DZ \Longrightarrow AZ : DZ = 2 : 1$.
Dus geldt $BZ = 2 \cdot EZ \Longrightarrow BZ : EZ = 2 : 1$.

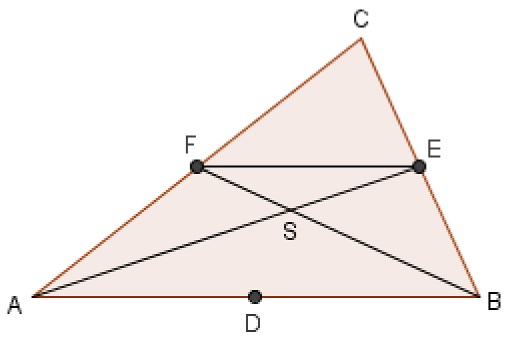


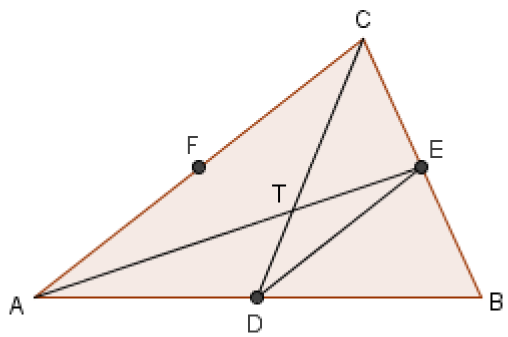
Stelling
De drie zwaartelijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt.

Gegeven
Driehoek ABC met zwaartelijnen AE, BF, CD

Te bewijzen
De drie zwaartelijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt.

Bewijs
De zwaartelijn BF snijdt zwaartelijn AE in punt S in de verhouding AS : SE = 2 : 1
De zwaartelijn CD snijdt zwaartelijn AE in punt T in de verhouding AT : TE = 2 : 1
Aangezien zwaartelijn AE tweemaal op dezelfde plek gesneden wordt, geldt dat S en T samenvallen. Noem dat het zwaartepunt Z.
Dus snijden de drie zwaartelijnen elkaar in één punt.



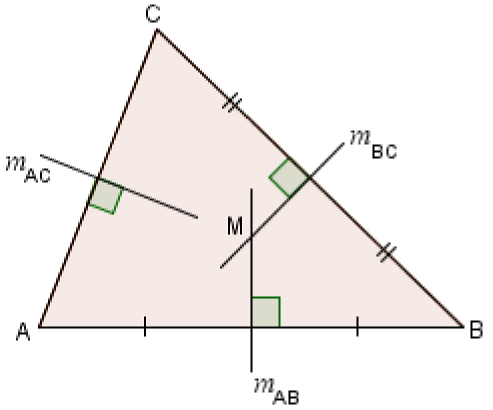


Stelling
De drie middelloodlijnen van de zijden van een driehoek snijden elkaar in één punt.

Gegeven
Driehoek ABC en de middelloodlijnen $m_{\text{AB}}, m_{\text{AC}}$ en m_{BC}

Te bewijzen
$m_{\text{AB}}, m_{\text{AC}}$ en m_{BC} gaan door één punt.

Bewijs
M is het snijpunt van m_{AB} en m_{BC}
(i) M op m_{AB}, dus AM = BM (lemma 2)
(ii) M op m_{BC}, dus CM = BM (lemma 2)
(i), (ii) $\Longrightarrow$ AM = CM, dus M ligt ook op de middelloodlijn m_{AC}.
Hiermee is bewezen dat de drie middelloodlijnen van de zijden van een driehoek door één punt gaan.



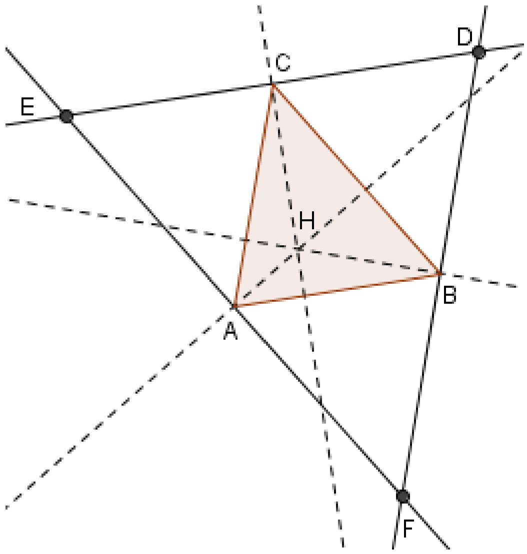
Stelling
De drie hoogtelijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt.

Gegeven
Driehoek ABC

Te bewijzen
de drie hoogtelijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt

Bewijs
Teken driehoek DEF met
DE // AB door C
EF // BC door A
FD // AC door B
De hoogtelijnen van driehoek ABC zijn de middelloodlijnen van driehoek DEF.
De middelloodlijnen gaan door één punt, de hoogtelijnen dus ook.

<u>Toelichting</u>
De driehoeken ABC, DCB, CEA en BAF zijn alle vier congruent (gelijkvormig en even groot HZH).
Dus C is het midden van DE; B het midden van DF en A het midden van EF.
De hoogtelijnen van driehoek ABC staan natuurlijk ook loodrecht op de zijden van driehoek DEF.
Dus zijn de hoogtelijnen van driehoek ABC de middelloodlijnen van driehoek DEF.

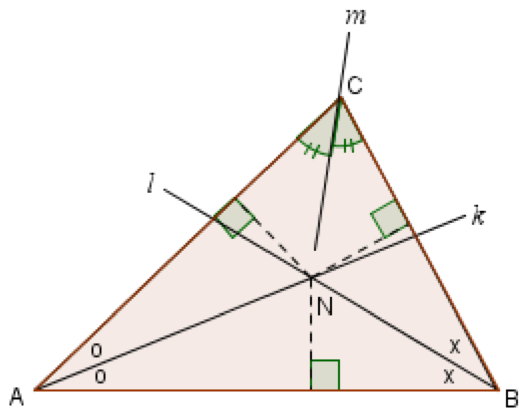


Stelling
De drie bissectrices van de hoeken van een driehoek snijden elkaar in één punt.

Gegeven
Driehoek ABC met de bissectrices *k*, *l* en *m*

Te bewijzen
De lijnen *k*, *l* en *m* gaan door één punt

Bewijs
k en *l* snijden elkaar in N.
(i) N op k, dus d(N, AB) = d(N, AC) (lemma 4)
(ii) N op l, dus d(N, AB) = d(N, BC) (lemma 4)
(i), (ii) ⟹ d(N, AC) = d(N, BC)
Dus N ligt op de bissectrice van ∠C en dus gaan alle bissectrices door één punt.

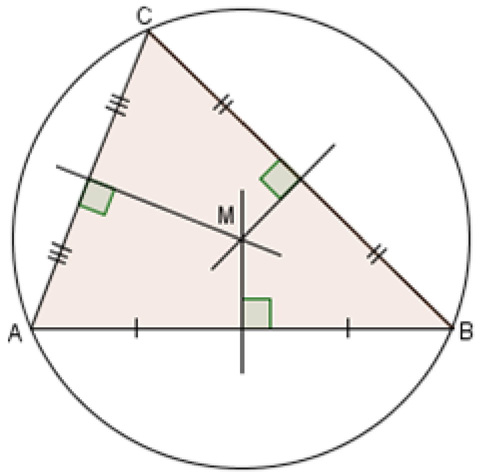


Stelling
Het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden in een driehoek is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de driehoek.

Gegeven
ΔABC met het snijpunt M van de drie middelloodlijnen van de zijden

Te bewijzen
M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC, ofwel: AM = BM = CM

Bewijs
(i) M ligt op de middelloodlijn van AB, dus AM = BM
(ii) M ligt op de middelloodlijn van BC, dus BM = CM
(i), (ii) ⟹ AM = BM = CM
Dus M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van ΔABC.

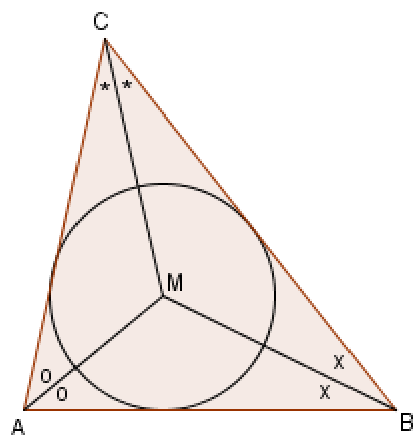


Stelling
Het snijpunt van de bissectrices van een driehoek is het middelpunt van de ingeschreven cirkel van de driehoek.

Gegeven: ΔABC met het snijpunt M van de drie bissectrices van de driehoek

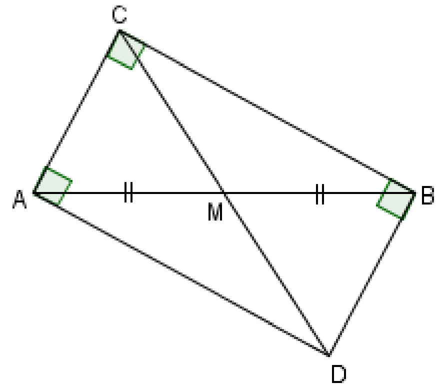
Te bewijzen
M is het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC, ofwel: d(M, AB) = d(M, AC) = d(M, BC)

Bewijs
(i) M ligt op de bissectrice van ∠A, dus d(M, AB) = d(M, AC)
(ii) M ligt op de bissectrice van ∠B, dus d(M, AB) = d(M, BC)
(i), (ii) ⟹ d(M, AB) = d(M, AC) = d(M, BC)
Dus M is het middelpunt van de ingeschreven cirkel van ΔABC.



Stelling van Thales
Als ΔABC rechthoekig is in C, dan ligt C op de cirkel met middellijn AB.

Gegeven
Driehoek ABC met $\angle C = 90°$ en M het midden van AB



Te bewijzen
AM = BM = CM

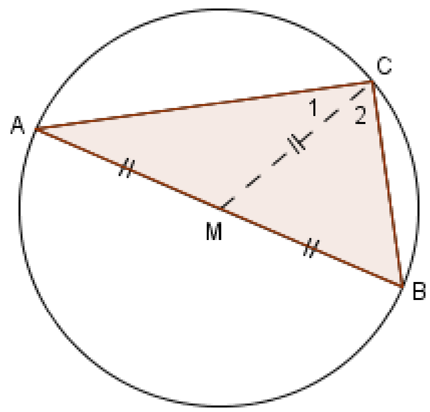
Bewijs
Teken rechthoek ADBC en de diagonalen AB en CD.
M is het snijpunt van de diagonalen, want AM = BM (ADBC is een rechthoek, dus ook een parallellogram).

(i) AB = CD (rechthoek)
(ii) CM = DM (parallellogram)
(iii) AM = BM (gegeven)

(i),(ii),(iii) $\Longrightarrow$ AM = BM = CM

Omgekeerde stelling van Thales
Is AB een middellijn van een cirkel en C een willekeurig punt op de cirkel, dan is in ΔABC hoek C gelijk aan 90°.

Gegeven
Driehoek ABC, zijde AB is middellijn van de cirkel met middelpunt M en C ligt op deze cirkel.



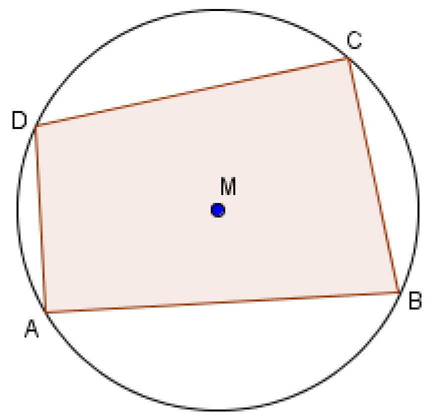
Te bewijzen
$\angle C = 90°$

Bewijs

(i) $\angle A + \angle B + \angle C_{12} = 180°$ (hoekensom driehoek)
(ii) AM = MC (straal), dus $\angle A = \angle C_1$ (gelijkbenige Δ)
(iii) BM = MC (straal), dus $\angle B = \angle C_2$ (gelijkbenige Δ)

(i),(ii),(iii) $\Longrightarrow \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_{12} = 180°$
Dus $2 \cdot \angle C_{12} = 180°$
Dus $\angle C_{12} = 90°$

Koordenvierhoekstelling
Als ABCD een koordenvierhoek is, dan is de som van elk paar overstaande hoeken 180˚.



I. Gegeven
Vierhoek ABCD met de hoekpunten op een cirkel waarvan het middelpunt M binnen de vierhoek ligt.

Te bewijzen
$\angle A + \angle C = 180°$ en $\angle B + \angle D = 180°$

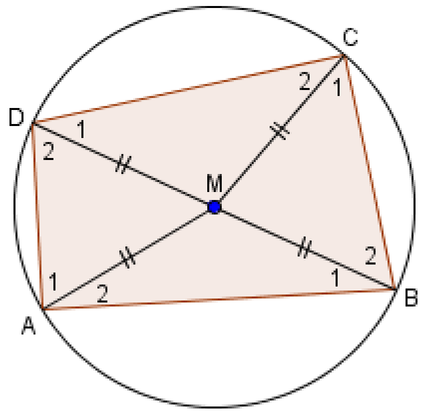
Bewijs
Teken de lijnstukken MA, MB, MC en MD.

(i) In ΔABM is $\angle A_2 = \angle B_1$ (gelijkbenige driehoek)
(ii) In ΔBCM is $\angle C_1 = \angle B_2$ (gelijkbenige driehoek)
(iii) In ΔCDM is $\angle C_2 = \angle D_1$ (gelijkbenige driehoek)
(iv) In ΔADM is $\angle A_1 = \angle D_2$ (gelijkbenige driehoek)

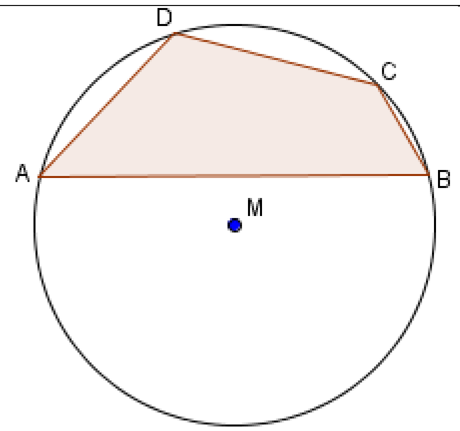
(i),(ii),(iii),(iv) $\Longrightarrow$
$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle C_1 + \angle C_2 = \angle B_1 + \angle B_2 + \angle D_1 + \angle D_2$

(v) Ofwel: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$
(vi) $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ (hoekensom vierhoek)

(v),(vi) $\Longrightarrow \angle A + \angle C = 180°$ en $\angle B + \angle D = 180°$



II. Gegeven
Vierhoek ABCD met de hoekpunten op een cirkel waarvan het middelpunt M buiten de vierhoek ligt.



Te bewijzen
$\angle A + \angle C = 180°$ en $\angle B + \angle D = 180°$

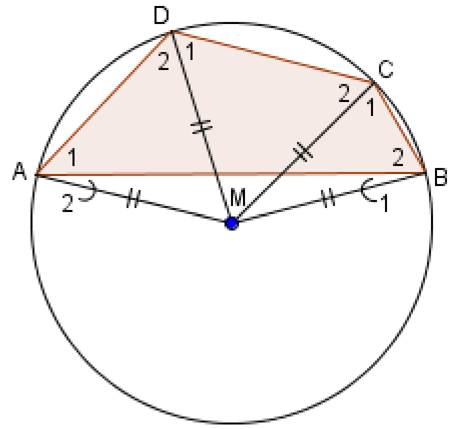
Bewijs
Teken de lijnstukken MA, MB, MC en MD.

(i) In ΔADM is $\angle A_{12} = \angle D_2$ (gelijkbenige driehoek)
(ii) In ΔCDM is $\angle C_2 = \angle D_1$ (gelijkbenige driehoek)
(iii) In ΔBCM is $\angle C_1 = \angle B_{12}$ (gelijkbenige driehoek)
(iv) In ΔABM is $\angle A_2 = \angle B_1$ (gelijkbenige driehoek)

(i),(ii),(iii),(iv) $\Longrightarrow$
$\angle A_{12} + \angle C_2 + \angle C_1 - \angle A_2 = \angle D_2 + \angle D_1 + \angle B_{12} - \angle B_1$

(v) Ofwel: $\angle A_1 + \angle C_{12} = \angle B_2 + \angle D_{12}$
(vi) $\angle A_1 + \angle B_2 + \angle C_{12} + \angle D_{12} = 360°$ (hoekensom vh.)

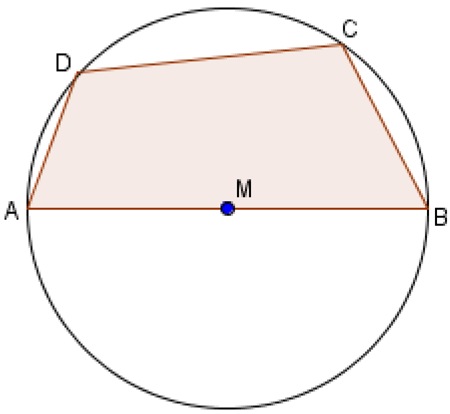
(v),(vi) $\Longrightarrow \angle A_1 + \angle C_{12} = 180°$ en $\angle B_2 + \angle D_{12} = 180°$
Dus $\angle A + \angle C = 180°$ en $\angle B + \angle D = 180°$

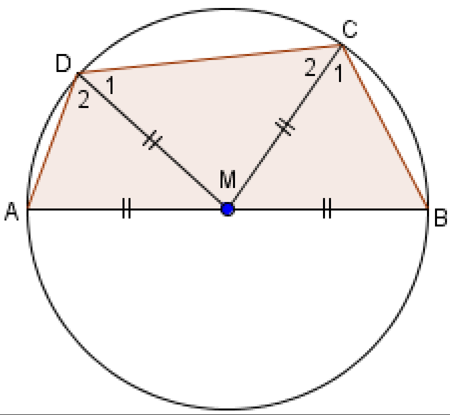


III. Gegeven
Vierhoek ABCD met de hoekpunten op een cirkel waarvan het middelpunt M op AB ligt.

Te bewijzen
$\angle A + \angle C = 180°$ en $\angle B + \angle D = 180°$

Bewijs
Teken de lijnstukken MD en MC
(i) In ΔADM is $\angle A = \angle D_2$ (gelijkbenige driehoek)
(ii) In ΔCDM is $\angle C_2 = \angle D_1$ (gelijkbenige driehoek)
(iii) In ΔBCM is $\angle C_1 = \angle B$ (gelijkbenige driehoek)
(i),(ii),(iii) $\Longrightarrow \angle A + \angle C_2 + \angle C_1 = \angle D_2 + \angle D_1 + \angle B$
(iv) ofwel $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$
(v) $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ (hoekensom vierhoek)
(iv),(v) $\Longrightarrow \angle A + \angle C = 180°$ en $\angle B + \angle D = 180°$



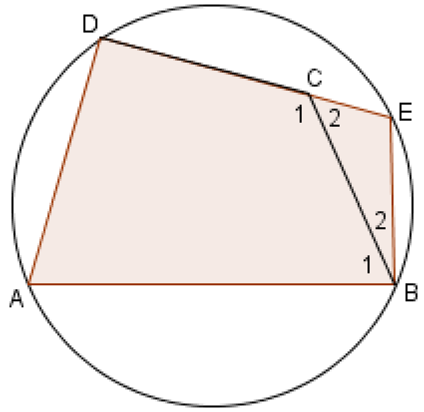


Omgekeerde koordenvierhoekstelling
Als in een vierhoek de som van een paar overstaande hoeken 180° is, dan is het een koordenvierhoek.

I. Gegeven
De cirkel door de punten A, B en D en een punt C *binnen* de cirkel.

Te bewijzen
$\angle A + \angle C > 180°$

Bewijs
Verleng DC. Omdat C binnen de cirkel ligt, snijdt het verlengde van DC de cirkel. Noem het snijpunt met de cirkel E en teken BE.

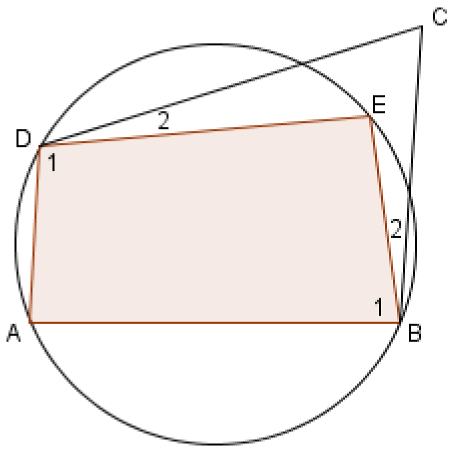


(i) $\angle A + \angle E = 180°$ (koordenvierhoek)
(ii) $\angle B_2 + \angle E + \angle C_2 = 180°$ (hoekensom driehoek)
(i),(ii) $\Longrightarrow \angle A = \angle B_2 + \angle C_2$
(iii) $\angle C_2 = 180° - \angle C_1$ (gestrekte hoek)
(i),(ii) + (iii) $\Longrightarrow$ dus $\angle A = \angle B_2 + 180° - \angle C_1$
(iv) ofwel $\angle A + \angle C_1 = \angle B_2 + 180°$
(v) $\angle B_2 > 0°$
(iv),(v) $\Longrightarrow \angle A + \angle C > 180°$

II. Gegeven
De cirkel door de punten A, B en D en een punt C *buiten* de cirkel.

Te bewijzen
$\angle A + \angle C < 180°$

Bewijs
Kies een punt E op de cirkel binnen vierhoek ABCD en teken BE en DE.



$\angle B_1 + \angle D_1 = 180°$ (koordenvierhoek)
(i) Dus $\angle B_{12} + \angle D_{12} > 180°$
(ii) $\angle A + \angle B_{12} + \angle C + \angle D_{12} = 360°$ (hoekensom vh.)
(i),(ii) $\Longrightarrow \angle A + \angle C < 180°$

Uit I volgt
als C binnen de cirkel door A, B en D ligt, geldt $\angle A + \angle C > 180°$
Uit II volgt
als C buiten de cirkel door A, B en D ligt, geldt $\angle A + \angle C < 180°$

Hieruit volgt dat C op de cirkel ligt als $\angle A + \angle C = 180°$.
Hiermee is de omgekeerde koordenvierhoekstelling bewezen.